Simulación de Procesos por Eventos Discretos

--

Fundamentos Teóricos

Generación de Variables Aleatorias:

El Método de Montecarlo

Introducción

- 1949: Metrópolis y Ulam, Fermi y von Neumann
- Método numérico que permite resolver problemas matemáticos mediante la simulación de variables aleatorias a partir de la generación de números aleatorios entre 0 y 1.
- La ruleta es un generador de una variable aleatoria uniforme ==> Montecarlo

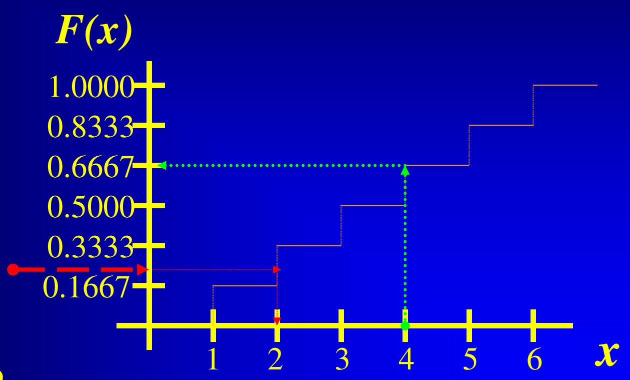
Introducción

- Método inverso!!!
- No es un cálculo de probabilidades
  - P(par)=0.5
- Es, si tiro un dado ideal, qué número me va a salir
- Y si tiro muchos, cada número debe salir el mismo número de veces…sin un orden predefinido.

Método Inverso: Ejemplo de 1 dado

- Ejemplo de distribución discreta: Tirar un dado

x	p(x)	F(x)
1	1/6	1/6
2	1/6	2/6
3	1/6	3/6
4	1/6	4/6
5	1/6	5/6
6	1/6	6/6

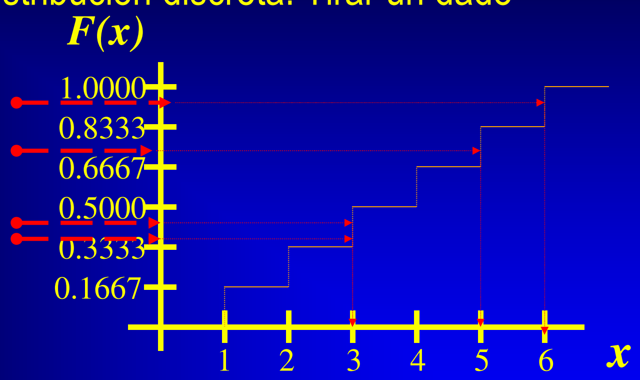


- u=0.22
  F(x)=F(u)=0.22
  x=2

Método Inverso: Ejemplo de 1 dado

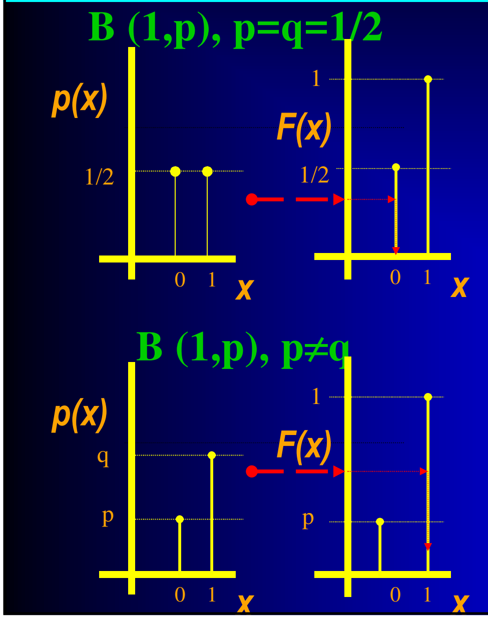
- Ejemplo de distribución discreta: Tirar un dado

u	x
u ≤ 1/6	1
1/6 < u ≤ 2/6	2
2/6 < u ≤ 3/6	3
3/6 < u ≤ 4/6	4
4/6 < u ≤ 5/6	5
5/6 < u ≤ 6/6	6



- u=0.76 F(x)=0.76 x=5
- u=0.44 F(x)=0.44 x=3
- u=0.91 F(x)=0.91 x=6
- u=0.35 F(x)=0.35 x=3

Binomial (1,p)



- Si

  $u \leq 0.5$ $x=0$

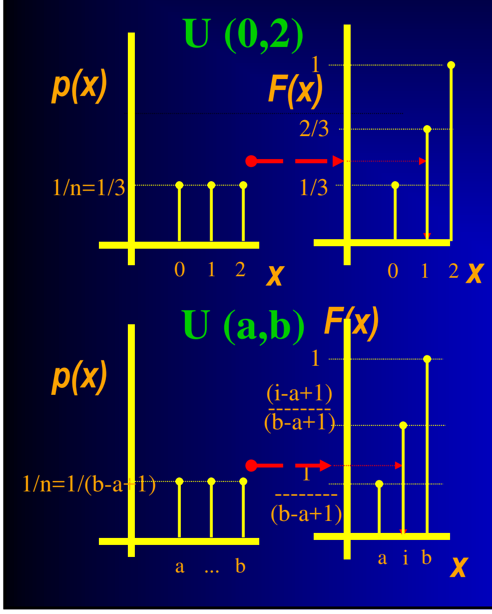
  $u > 0.5$ $x=1$

- Si

  $u \leq p$ $x=0$

  $u > p$ $x=1$

Uniforme (a,b)



- Si

  $u \leq 0.333$ $x=0$

  $0.333 < u \leq 0.667$ $x=1$

  $u > 0.667$ $x=2$

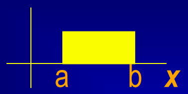
- Si

  $\frac{(i-a)}{(b-a+1)} < u \leq \frac{(i-a+1)}{(b-a+1)}$ $x=i$

Método Inverso: Distribuciones Continuas

- Ejemplos para distribuciones continuas

- UNIFORME (a,b)



$$f(x) = \frac{1}{(b-a)} \qquad a \le x \le b$$

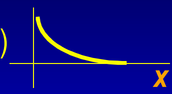
$$F(x) = \frac{x-a}{(b-a)} \qquad a \le x \le b$$

$$u = \frac{x-a}{(b-a)}$$

$$x = a + u(b-a)$$

- U(3,8), u=0.31
  x=3+0.31(8-3)=4.55

- EXPONENCIAL (λ)



$$f(x)=\lambda e^{-\lambda x} \qquad x \ge 0$$

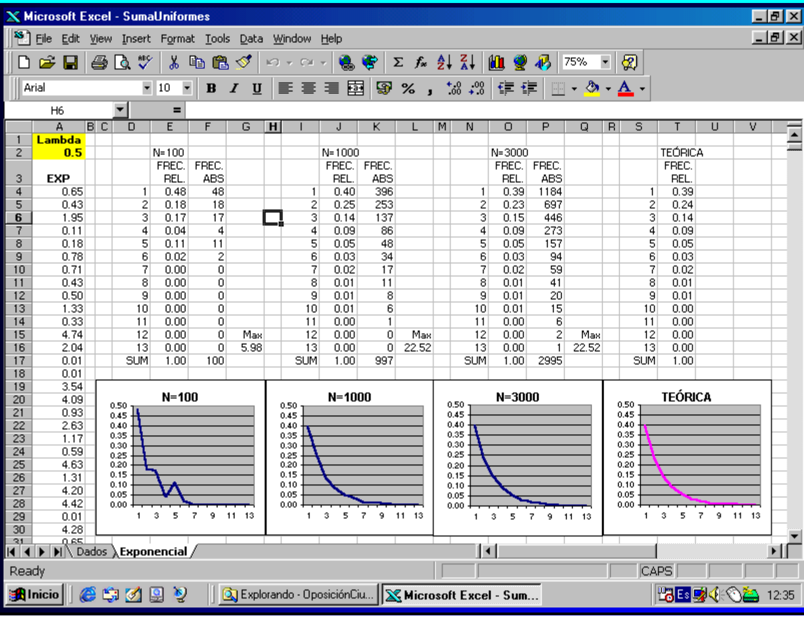
$$F(x)=1-e^{-\lambda x} \qquad x \ge 0$$

$$u = 1-e^{-\lambda x}$$

$$x = -(1/\lambda)\ \ln(1-u)$$

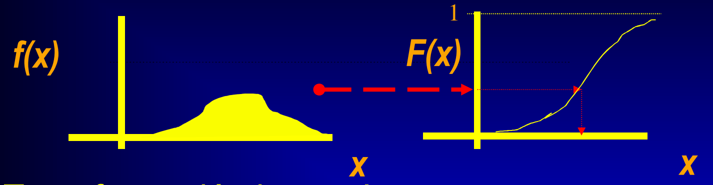
- EXP(0.5), u=0.71
  x= -(1/0.5) ln(1-0.71) = 2.4757

Método Inverso: EXCEL



	A	D	E	F	G	I	J	K	L	N	O	P	Q	S	T
1	Lambda														
2	0.5		N=100				N=1000				N=3000				TEÓRICA
3	EXP		FREC. REL.	FREC. ABS			FREC. REL.	FREC. ABS			FREC. REL.	FREC. ABS			FREC. REL.
4	0.65	1	0.48	48		1	0.40	396		1	0.39	1184		1	0.39
5	0.43	2	0.18	18		2	0.25	253		2	0.23	697		2	0.24
6	1.95	3	0.17	17		3	0.14	137		3	0.15	446		3	0.14
7	0.11	4	0.04	4		4	0.09	86		4	0.09	273		4	0.09
8	0.18	5	0.11	11		5	0.05	48		5	0.05	157		5	0.05
9	0.78	6	0.02	2		6	0.03	34		6	0.03	94		6	0.03
10	0.71	7	0.00	0		7	0.02	17		7	0.02	59		7	0.02
11	0.43	8	0.00	0		8	0.01	11		8	0.01	41		8	0.01
12	0.50	9	0.00	0		9	0.01	8		9	0.01	20		9	0.01
13	1.33	10	0.00	0		10	0.01	6		10	0.01	15		10	0.00
14	0.33	11	0.00	0		11	0.00	1		11	0.00	6		11	0.00
15	4.74	12	0.00	0	Max	12	0.00	0	Max	12	0.00	2	Max	12	0.00
16	2.04	13	0.00	0	5.98	13	0.00	0	22.52	13	0.00	1	22.52	13	0.00
17	0.01	SUM	1.00	100		SUM	1.00	997		SUM	1.00	2995		SUM	1.00
18	0.01														
19	3.54														
20	4.09														
21	0.93														
22	2.63														
23	1.17														
24	0.59														
25	4.63														
26	1.31														
27	4.20														
28	4.42														
29	0.01														
30	4.28														

Método Inverso: Transformación Integral



- Transformación integral

  $u=F_x(x)$, $x=F_x^{-1}(u)$

- Demostración:

  $Y=F_x(x)$

  $F_Y(y)=P\{Y\leq y\}=P\{F_x(x)\leq y\}=P\{x\leq F_x^{-1}(y)\}=F_x\{F_x^{-1}(y)\}=y$

  $f_Y(y)=1 \quad 0\leq Y\leq 1 \quad \Longrightarrow Y=U(0,1)$

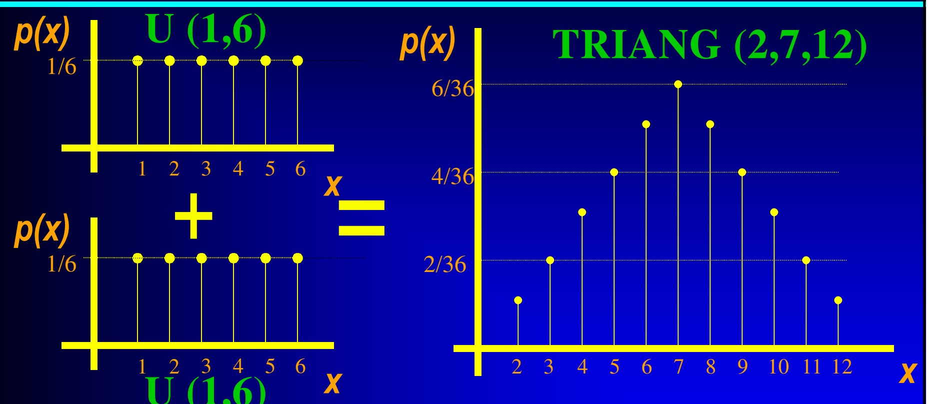
  $u=F_x(x)$, $x=F_x^{-1}(u)$

Método Inverso: Pasos

- Pasos:
  - Se resuelve para *x* la ecuación $u=F_x(x)$

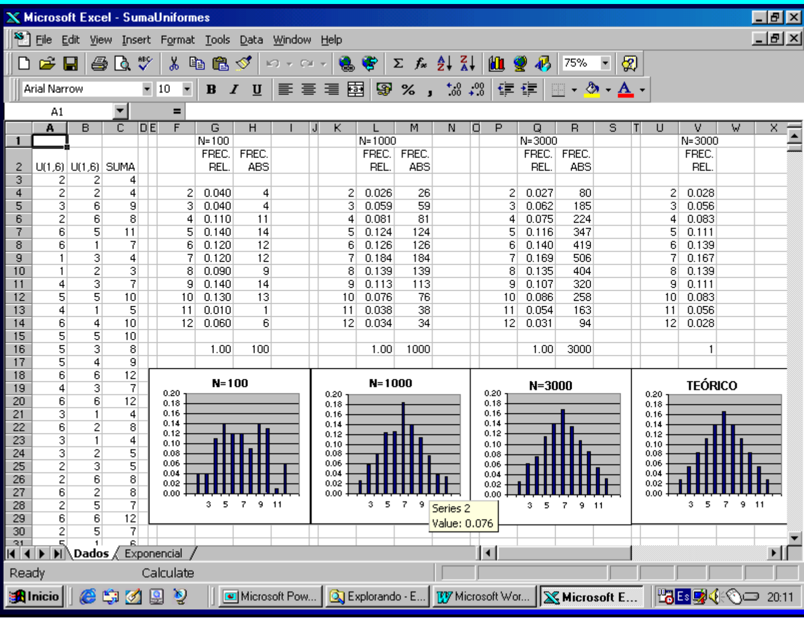
    $x=F_x^{-1}(u)$
  - Se obtiene un valor *u* de U(0,1) y se calcula *x*
  - Se realiza el paso anterior tantas veces como sea necesario.

Cálculo Teórico



- Suma=2 (1,1)
- Suma=3 (2,1), (1,2)
- Suma=4 (3,1), (1,3), (2,2)
- Suma=5 (4,1), (1,4), (3,2), (2,3)
- Suma=6 (5,1), (1,5), (4,2), (2,4), (3,3)
- Suma=12 (6,6)
- Suma=11 (6,5), (5,6)
- Suma=10 (6,4), (4,6), (5,5)
- Suma=9 (6,3), (3,6), (5,4), (4,5)
- Suma=8 (6,2), (2,6), (5,3), (3,5), (4,4)
- Suma=7 (6,1), (1,6), (5,2), (2,5), (4,3), (3,4)

Montecarlo en Excel



	A	B	C	F	G	H	K	L	M	P	Q	R	U	V
1					N=100			N=1000			N=3000			N=3000
2	U(1,6)	U(1,6)	SUMA		FREC. REL.	FREC. ABS		FREC. REL.	FREC. ABS		FREC. REL.	FREC. ABS		FREC. REL.
3	2	2	4											
4	2	2	4	2	0.040	4	2	0.026	26	2	0.027	80	2	0.028
5	3	6	9	3	0.040	4	3	0.059	59	3	0.062	185	3	0.056
6	2	6	8	4	0.110	11	4	0.081	81	4	0.075	224	4	0.083
7	6	5	11	5	0.140	14	5	0.124	124	5	0.116	347	5	0.111
8	6	1	7	6	0.120	12	6	0.126	126	6	0.140	419	6	0.139
9	1	3	4	7	0.120	12	7	0.184	184	7	0.169	506	7	0.167
10	1	2	3	8	0.090	9	8	0.139	139	8	0.135	404	8	0.139
11	4	3	7	9	0.140	14	9	0.113	113	9	0.107	320	9	0.111
12	5	5	10	10	0.130	13	10	0.076	76	10	0.086	258	10	0.083
13	4	1	5	11	0.010	1	11	0.038	38	11	0.054	163	11	0.056
14	6	4	10	12	0.060	6	12	0.034	34	12	0.031	94	12	0.028
15	5	5	10											
16	5	3	8		1.00	100		1.00	1000		1.00	3000		1
17	5	4	9											
18	6	6	12											
19	4	3	7											
20	6	6	12											
21	3	1	4											
22	6	2	8											
23	3	1	4											
24	3	2	5											
25	2	3	5											
26	2	6	8											
27	6	2	8											
28	2	5	7											
29	6	6	12											
30	2	5	7											
31	5	1	6											

Método Inverso: Distribuciones Discretas

- Generalizando para distribuciones discretas y mixtas

  $x = \min\{x: F(x) > u\}$

x	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*
p(x)	0.1	0.2	0.4	0.1	0.2
F(x)	0.1	0.3	0.7	0.8	1.0

u	*x*
$0.0 \le u \le 0.1$	0
$0.1 < u \le 0.3$	1
$0.3 < u \le 0.7$	2
$0.7 < u \le 0.8$	3
$0.8 < u \le 1.0$	4

Muestreo de distribuciones

- Método Inverso: Sirve para generar valores de distribuciones de probabilidad que disponga de inversa de la función de distribución $F^{-1}(x)$

- SÍ
  - Distribuciones Discretas
    - Binomial
    - Uniforme
    - General
  - Distribuciones Continuas
    - Uniforme
    - Exponencial
    - Triangular

- NO: Métodos especiales
  - Distribuciones Discretas
    - Poisson
    - ...
  - Distribuciones Continuas
    - Normal
    - ...

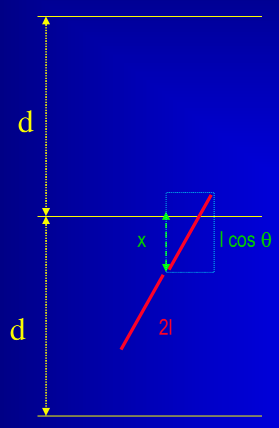
Historia y Génesis

- Estimación experimental de π
- Antiguo Testamento
- Problema del Ladrillejo -- Problema de la aguja
  - Conde de Buffon (1733)
  - Hall (1873)

El problema de la aguja

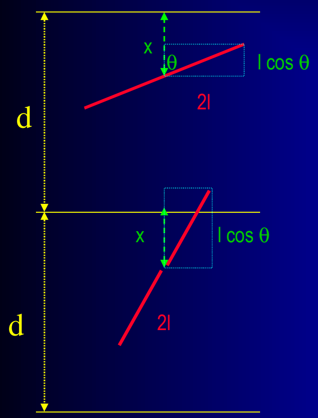
- Buffon (1733)

$$P_{teo}(\text{corte}) = P_{exp}(\text{corte}) \implies \pi$$



El problema de la aguja

- El problema de la aguja de Buffon



$0 \leq x \leq d/2 \qquad x \rightarrow U(0,d/2)$

$-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2 \qquad \theta \rightarrow U(-\pi/2, \pi/2)$

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{b-a}$$

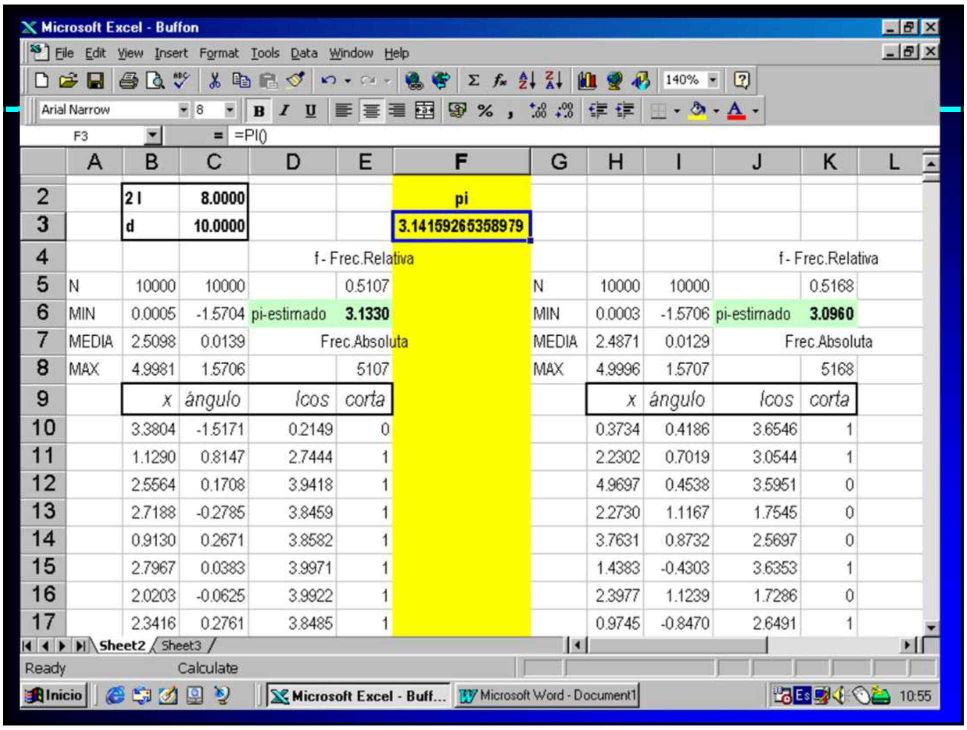
$$f(x) = \frac{1}{d/2 - 0} = \frac{1}{d/2}$$

$$f(\theta) = \frac{1}{\pi/2 - \left(-\pi/2\right)} = \frac{1}{\pi}$$

$$f(x;\theta) = \frac{1}{d/2}\frac{1}{\pi} = \frac{2}{\pi d}$$

Si $\quad x < l\cos\theta, \quad$ corta

$$P(\text{aguja corte}) = P(x < l\cos\theta) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{l\cos\theta} \frac{2}{\pi d}\, d\theta dx = \frac{2}{\pi d}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [x]_0^{l\cos\theta} d\theta = \frac{2}{\pi d}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [l\cos\theta] d\theta = \frac{2}{\pi d}[l\,\mathrm{sen}\,\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4l}{\pi d}$$



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
2		2 l	8.0000			pi						
3		d	10.0000			3.14159265358979						
4				f - Frec.Relativa						f - Frec.Relativa		
5	N	10000	10000		0.5107		N	10000	10000		0.5168	
6	MIN	0.0005	-1.5704	pi-estimado	3.1330		MIN	0.0003	-1.5706	pi-estimado	3.0960	
7	MEDIA	2.5098	0.0139	Frec.Absoluta			MEDIA	2.4871	0.0129	Frec.Absoluta		
8	MAX	4.9981	1.5706		5107		MAX	4.9996	1.5707		5168	
9		x	angulo	lcos	corta			x	angulo	lcos	corta	
10		3.3804	-1.5171	0.2149	0			0.3734	0.4186	3.6546	1	
11		1.1290	0.8147	2.7444	1			2.2302	0.7019	3.0544	1	
12		2.5564	0.1708	3.9418	1			4.9697	0.4538	3.5951	0	
13		2.7188	-0.2785	3.8459	1			2.2730	1.1167	1.7545	0	
14		0.9130	0.2671	3.8582	1			3.7631	0.8732	2.5697	0	
15		2.7967	0.0383	3.9971	1			1.4383	-0.4303	3.6353	1	
16		2.0203	-0.0625	3.9922	1			2.3977	1.1239	1.7286	0	
17		2.3416	0.2761	3.8485	1			0.9745	-0.8470	2.6491	1	